Una extensión de las Álgebras de Łukasiewicz trivalentes equivalente a las álgebras de semi Nelson semisimples

Juan M. Cornejo - Diego Castaño
CONICET - UNS

Álgebras de Łukasiewicz trivalentes

Definición

Un álgebra de Łukasiewicz trivalente [2, Definición 4.5] es un álgebra $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, \nabla, \sim, 1 \rangle$ *que verifica los siguientes axiomas:*

Álgebras de Łukasiewicz trivalentes

Definición

Un álgebra de Łukasiewicz trivalente [2, Definición 4.5] *es un álgebra* $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, \nabla, \sim, 1\rangle$ *que verifica los siguientes axiomas:*

- (L1) $\langle A, \wedge, \vee, 1\rangle$ *es un reticulado distributivo con último elemento* 1.
- (L2) $\sim\sim x \approx x$
- (L3) $\sim (x \wedge y) \approx \sim x \vee \sim y$
- (L4) $\sim x \vee \nabla x \approx 1$
- (L5) $x \wedge \sim x \approx \sim x \wedge \nabla x$
- (L6) $\nabla(x \wedge y) \approx \nabla x \wedge \nabla y$

Álgebras de Nelson semisimples

Definición

Las álgebras de Nelson [2] son álgebras $\mathbf{A} = \langle A; \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1\rangle$ *tal que satisfacen las siguientes condiciones:*

Álgebras de Nelson semisimples

Definición

Las álgebras de Nelson [2] son álgebras $\mathbf{A} = \langle A; \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1 \rangle$ *tal que satisfacen las siguientes condiciones:*

- (N1) $\langle A; \wedge, \vee \rangle$ *es un reticulado distributivo.*
- (N2) $\sim\sim x \approx x$,
- (N3) $\sim (x \wedge y) \approx \sim x \vee \sim y$,
- (N4) $x \wedge \sim x \approx (x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y)$,
- (N5) $x \rightarrow x \approx 1$,
- (N6) $x \rightarrow (y \rightarrow z) \approx (x \wedge y) \rightarrow z$,
- (N7) $x \wedge (x \rightarrow y) \approx x \wedge (\sim x \vee y)$.

Álgebras de Nelson semisimples

Definición

Las álgebras de Nelson [2] son álgebras $\mathbf{A} = \langle A; \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1\rangle$ *tal que satisfacen las siguientes condiciones:*

- (N1) $\langle A; \wedge, \vee\rangle$ *es un reticulado distributivo.*
- (N2) $\sim\sim x \approx x$,
- (N3) $\sim (x \wedge y) \approx \sim x \vee \sim y$,
- (N4) $x \wedge \sim x \approx (x \wedge \sim x) \wedge (y \vee \sim y)$,
- (N5) $x \rightarrow x \approx 1$,
- (N6) $x \rightarrow (y \rightarrow z) \approx (x \wedge y) \rightarrow z$,
- (N7) $x \wedge (x \rightarrow y) \approx x \wedge (\sim x \vee y)$.

Un álgebra de Nelson $\mathbf{A} = \langle A; \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1\rangle$ *es semisimple si y sólo si satisface la identidad* $x \vee (x \rightarrow \sim 1) \approx 1$.

Equivalencia por términos

De [2, Theorems 4.15 and 4.16] se tiene que:

$\mathcal{N}^S : \{\wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1\}$

$(\mathcal{N} + x \vee (x \rightarrow 0) \approx 1)$

$\mathcal{L} : \{\wedge, \vee, \nabla, \sim, 1\}$

Equivalencia por términos

De [2, Theorems 4.15 and 4.16] se tiene que:

$$\mathcal{N}^S : \{\wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1\} \xrightarrow{\nabla x := \sim x \rightarrow (\sim 1)} \mathcal{L} : \{\wedge, \vee, \nabla, \sim, 1\}$$

$(\mathcal{N} + x \vee (x \rightarrow 0) \approx 1)$

Equivalencia por términos

De [2, Theorems 4.15 and 4.16] se tiene que:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{N}^S : \{\wedge, \vee, \to, \sim, 1\} & \xrightarrow{\nabla x := \sim x \to (\sim 1)} & \mathcal{L} : \{\wedge, \vee, \nabla, \sim, 1\} \\ (\mathcal{N} + x \vee (x \to 0) \approx 1) & \xleftarrow[x \to y := \nabla(\sim x) \vee y]{} & \end{array}$$

Álgebras de semi Nelson semisimples

Definición

Un álgebra $\mathbf{A} = \langle A; \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1\rangle$ *es un álgebra de semi Nelson [1] si se satisfacen las siguientes condiciones:*

Álgebras de semi Nelson semisimples

Definición

Un álgebra $\mathbf{A} = \langle A; \wedge, \vee, \to, \sim, 1\rangle$ *es un* *álgebra de semi Nelson* *[1] si se satisfacen las siguientes condiciones:*

- (SN1) $\langle A; \wedge, \vee, \to_N, \sim, 1\rangle$ *es un álgebra de Nelson,*
- (SN2) $(x \to_N y) \to_N [(y \to_N x) \to_N [(x \to z) \to_N (y \to z)]] \approx 1,$
- (SN3) $(x \to_N y) \to_N [(y \to_N x) \to_N [(z \to x) \to_N (z \to y)]] \approx 1,$
- (SN4) $(\sim (x \to y)) \to_N (x \wedge \sim y) \approx 1,$
- (SN5) $(x \wedge \sim y) \to_N (\sim (x \to y)) \approx 1.$

donde $x \to_N y$ *es el término* $x \to (x \wedge y)$.

Álgebras de semi Nelson semisimples

Definición

Un álgebra $\mathbf{A} = \langle A; \wedge, \vee, \to, \sim, 1\rangle$ *es un* *álgebra de semi Nelson* *[1] si se satisfacen las siguientes condiciones:*

- (SN1) $\langle A; \wedge, \vee, \to_N, \sim, 1\rangle$ *es un álgebra de Nelson,*
- (SN2) $(x \to_N y) \to_N [(y \to_N x) \to_N [(x \to z) \to_N (y \to z)]] \approx 1,$
- (SN3) $(x \to_N y) \to_N [(y \to_N x) \to_N [(z \to x) \to_N (z \to y)]] \approx 1,$
- (SN4) $(\sim (x \to y)) \to_N (x \wedge \sim y) \approx 1,$
- (SN5) $(x \wedge \sim y) \to_N (\sim (x \to y)) \approx 1.$

donde $x \to_N y$ *es el término* $x \to (x \wedge y)$.
Un álgebra de semi Nelson $\mathbf{A} = \langle A; \wedge, \vee, \to, \sim, 1\rangle$ *es* *semisimple* *si y sólo si satisface la identidad* $x \vee (x \to (\sim 1)) \approx 1$.

álgebras de semi Nelson semisimples

Si notamos $\mathcal{N}^S$ y $\mathcal{SN}^S$ las variedades de las álgebras de Nelson semisimples y semi Nelson semisimples respectivamente, se tiene que

álgebras de semi Nelson semisimples

Si notamos $\mathcal{N}^S$ y $\mathcal{SN}^S$ las variedades de las álgebras de Nelson semisimples y semi Nelson semisimples respectivamente, se tiene que

$$\mathcal{N}^S \subset \mathcal{SN}^S.$$

Problema

$\mathcal{N}^S : \{\wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1\}$

$(\mathcal{N} + x \vee (x \rightarrow 0) \approx 1)$

$\mathcal{L} : \{\wedge, \vee, \nabla, \sim, 1\}$

Problema

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\begin{array}{l} \mathcal{N}^S : \{\wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1\} \\ (\mathcal{N} + x \vee (x \rightarrow 0) \approx 1) \end{array} \arrow[r, shift left, "\nabla x := \sim x \rightarrow (\sim 1)"] & \mathcal{L} : \{\wedge, \vee, \nabla, \sim, 1\} \arrow[l, shift left, "x \rightarrow y := \nabla(\sim x) \vee y"]
\end{tikzcd}$$

Problema

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c} \mathcal{N}^S : \{\wedge, \vee, \to, \sim, 1\} \\ (\mathcal{N} + x \vee (x \to 0) \approx 1) \end{array} \arrow[r, shift left, "\nabla x := \sim x \to (\sim 1)"] & \mathcal{L} : \{\wedge, \vee, \nabla, \sim, 1\} \arrow[l, shift left, "x \to y := \nabla(\sim x) \vee y"] \\
\begin{array}{c} \mathcal{SN}^S : \{\wedge, \vee, \to, \sim, 1\} \\ (\mathcal{SN} + x \vee (x \to 0) \approx 1) \end{array} \arrow[u, hook, "\text{subvariedad}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Problema

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\begin{array}{l} \mathcal{N}^S : \{\wedge, \vee, \to, \sim, 1\} \\ (\mathcal{N} + x \vee (x \to 0) \approx 1) \end{array} \arrow[r, shift left, "\nabla x := \sim x \to (\sim 1)"] \arrow[d, hook, "\text{subvariedad}"] & \mathcal{L} : \{\wedge, \vee, \nabla, \sim, 1\} \arrow[l, shift left, "x \to y := \nabla(\sim x) \vee y"] \arrow[d, hook, "\text{subvariedad}"] \\
\begin{array}{l} \mathcal{SN}^S : \{\wedge, \vee, \to, \sim, 1\} \\ (\mathcal{SN} + x \vee (x \to 0) \approx 1) \end{array} \arrow[r, shift left, "\nabla x := ?????"] & ???? : \{\wedge, \vee, \nabla, \sim, 1\} \arrow[l, shift left, "x \to y := ?????"]
\end{tikzcd}$$

La variedad $\mathcal{SL}$

La respuesta al problema anterior está dada por la siguiente variedad:

La variedad $\mathcal{SL}$

La respuesta al problema anterior está dada por la siguiente variedad:

Definición

Un $\mathcal{SL}$-álgebra es un álgebra $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, \nabla, \sim, 1 \rangle$ *que verifica los siguientes axiomas:*

La variedad $\mathcal{SL}$

La respuesta al problema anterior está dada por la siguiente variedad:

Definición

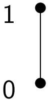
Un $\mathcal{SL}$-álgebra es un álgebra $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, \nabla, \sim, 1\rangle$ *que verifica los siguientes axiomas:*

- (SL1) $\langle A, \wedge, \vee, \nabla_N, \sim, 1\rangle$ *es un álgebra de Łukasiewicz trivalente.*
- (SL2) $\nabla 1 \geq \sim \nabla 1$
- (SL3) $\nabla x \approx \nabla_N(x) \wedge (\nabla 1 \vee \nabla_N(\sim x))$

donde $\nabla_N x := x \vee \nabla x$.

Ejemplos de $\mathcal{SL}$-álgebras

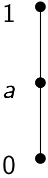
$\mathbf{2}_{\mathcal{L}}$:



∇	0	1
	0	1

$\sim$	0	1
	1	0

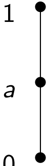
$\mathbf{3}_{\mathcal{L}}$:



∇	0	a	1
	0	1	1

$\sim$	0	a	1
	1	a	0

$\mathbf{3}_{\mathcal{SL}}$:



∇	0	a	1
	0	1	a

$\sim$	0	a	1
	1	a	0

Equivalencia por términos entre $\mathcal{SN}^S$ y $\mathcal{SL}$

Teorema

Se tiene que

1. (a) *Si* $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, \nabla, \sim, 1\rangle \in \mathcal{SL}$ *entonces* $\mathbf{A}^{\Rightarrow} = \langle A, \wedge, \vee, \Rightarrow, \sim, 1\rangle$ *es un álgebra de semi Nelson semisimple definiendo*

$$x \Rightarrow y := (x \vee \sim y \vee \nabla y) \wedge (y \vee \sim x \vee \nabla \sim x).$$

Equivalencia por términos entre $\mathcal{SN}^S$ y $\mathcal{SL}$

Teorema

Se tiene que

(a) *Si* $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, \nabla, \sim, 1\rangle \in \mathcal{SL}$ *entonces* $\mathbf{A}^{\Rightarrow} = \langle A, \wedge, \vee, \Rightarrow, \sim, 1\rangle$ *es un álgebra de semi Nelson semisimple definiendo*

$$x \Rightarrow y := (x \vee \sim y \vee \nabla y) \wedge (y \vee \sim x \vee \nabla \sim x).$$

(b) *Si* $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, \to, \sim, 1\rangle \in \mathcal{SN}$ *semisimple entonces* $\mathbf{A}^{\nabla} = \langle A, \wedge, \vee, \nabla, \sim, 1\rangle \in \mathcal{SL}$ *definiendo*

$$\nabla(x) := (\sim x) \to x.$$

Equivalencia por términos entre $\mathcal{SN}^S$ y $\mathcal{SL}$

Teorema

Se tiene que

(a) *Si* $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, \nabla, \sim, 1\rangle \in \mathcal{SL}$ *entonces* $\mathbf{A}^{\Rightarrow} = \langle A, \wedge, \vee, \Rightarrow, \sim, 1\rangle$ *es un álgebra de semi Nelson semisimple definiendo*

$$x \Rightarrow y := (x \vee \sim y \vee \nabla y) \wedge (y \vee \sim x \vee \nabla \sim x).$$

(b) *Si* $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, 1\rangle \in \mathcal{SN}$ *semisimple entonces* $\mathbf{A}^{\nabla} = \langle A, \wedge, \vee, \nabla, \sim, 1\rangle \in \mathcal{SL}$ *definiendo*

$$\nabla(x) := (\sim x) \rightarrow x.$$

(c) $(\mathbf{A}^{\Rightarrow})^{\nabla} = \mathbf{A}$ *para* $\mathbf{A} \in \mathcal{SL}$ *y* $(\mathbf{B}^{\nabla})^{\Rightarrow} = \mathbf{B}$ *para* $\mathbf{B}$ *un álgebra de semi Nelson semisimple.*

Equivalencia por términos entre $\mathcal{SN}^S$ y $\mathcal{SL}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\begin{array}{l}\mathcal{N}^S : \{\wedge, \vee, \to, \sim, 1\} \\ (\mathcal{N} + x \vee (x \to 0) \approx 1)\end{array} \arrow[r, shift left, "\nabla x := \sim x \to (\sim 1)"] \arrow[d, hook', "\text{subvariedad}"] & \mathcal{L} : \{\wedge, \vee, \nabla, \sim, 1\} \arrow[l, shift left, "x \to y := \nabla(\sim x) \vee y"] \arrow[d, hook', "\text{subvariedad}"] \\
\begin{array}{l}\mathcal{SN}^S : \{\wedge, \vee, \to, \sim, 1\} \\ (\mathcal{SN} + x \vee (x \to 0) \approx 1)\end{array} \arrow[r, shift left, "\nabla x := \sim x \to x"] & \mathcal{SL} : \{\wedge, \vee, \nabla, \sim, 1\} \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

$$x \to y := (x \vee \sim y \vee \nabla y) \wedge (y \vee \sim x \vee \nabla(\sim x))$$

Álgebras subdirectamente irreducibles en $\mathcal{SL}$

Teorema

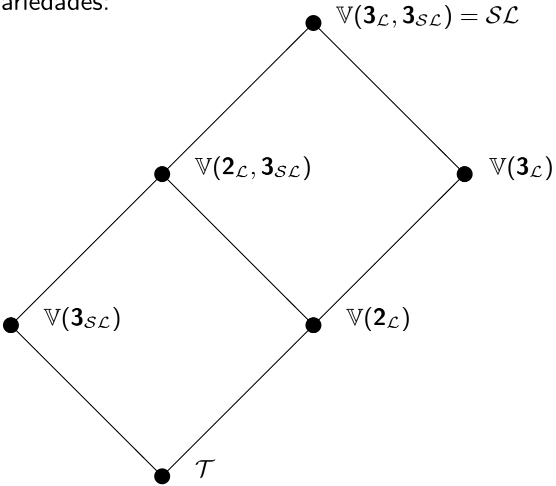
Las únicas álgebras subdirectamente irreducibles de $\mathcal{SL}$ son $\mathbf{2}_{\mathcal{L}}$, $\mathbf{3}_{\mathcal{L}}$ y $\mathbf{3}_{\mathcal{SL}}$.

Reticulado de subvariedades de $\mathcal{SL}$

$\mathcal{SL} = \mathbb{V}(\mathbf{3}_{\mathcal{L}}, \mathbf{3}_{\mathcal{SL}})$.

Reticulado de subvariedades de $\mathcal{SL}$

$\mathcal{SL} = \mathbb{V}(\mathbf{3}_{\mathcal{L}}, \mathbf{3}_{\mathcal{SL}})$.
Reticulado de subvariedades:



Base ecuacional para cada subvariedad de $\mathcal{SL}$

Teorema

El siguiente cuadro muestra una base ecuacional, módulo $\mathcal{SL}$, para cada una de las subvariedades propias no triviales $\mathcal{V}$ de $\mathcal{SL}$ donde $\nabla^2 x := \nabla(\nabla x)$.

Subvariedad	Base ecuacional
$\mathbb{V}(\mathbf{2}_{\mathcal{L}})$	$x \vee \sim x \approx 1$
$\mathbb{V}(\mathbf{3}_{\mathcal{L}})$	$\nabla 1 \approx 1$
$\mathbb{V}(\mathbf{3}_{\mathcal{SL}})$	$\nabla 1 \approx \sim \nabla 1$
$\mathbb{V}(\mathbf{2}_{\mathcal{L}}, \mathbf{3}_{\mathcal{SL}})$	$\nabla^2 x \approx x$

Referencias

J. M. Cornejo and I. Viglizzo, *Semi-Nelson algebra,* ORDER (2018), volume 35, issue 1, p 23 - 45.

Viglizzo, Ignacio, *Álgebras de Nelson,* Magister dissertation in Mathematics, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, available at `https://sites.google.com/site/viglizzo/viglizzo99nelson`. Instituto de Matemática de Bahía Blanca, Universidad Nacional del Sur (1999).

Muchas gracias por su atención.